

PESQUISA OPERACIONAL

INTRODUÇÃO À DISCIPLINA

HISTÓRICO

CARACTERÍSTICAS

ORIGENS

- ▶ 1938: convocação de cientistas para a análise de situações militares.
- ▶ Segunda Guerra: alocar recursos escassos nas operações militares.
- ▶ Abordagem científica para resolução de problemas estratégicos e táticos.
- ▶ Equipes multidisciplinares: “O Circo de Blackett”.
- ▶ Pesquisas sobre atividades operacionais militares. Exércitos britânico e americano.
- ▶ Indústria pós-guerra: complexidade.

SOCIEDADES PROFISSIONAIS

- ▶ 1948: Massachusetts Institute of Technology - MIT (Estados Unidos).
- ▶ 1945/1970: Idade de ouro, com rápida expansão.
- ▶ Melhoria das técnicas e utilização dos computadores.
- ▶ 1948: Operational Research Club (Inglaterra).
- ▶ 1995: Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS).
- ▶ 1969: Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional.

DEFINIÇÃO

- ▶ Método científico aplicado em diversas áreas.
- ▶ Utilizado para a resolução de problemas.
- ▶ Aplicação de técnicas de modelagem matemática.
- ▶ Procura obter a melhor solução ou solução ótima.
- ▶ Ótimo sob o ponto de vista matemático.
- ▶ Tomada de decisão mais efetiva.

SITUAÇÕES-PROBLEMA

▶ Dados estruturados:

- ▶ Formular um modelo quantitativo.
- ▶ Encontrar a solução.
- ▶ Considerar os fatores imponderáveis.

▶ Dados parcialmente estruturados:

- ▶ Utilizar modelagem matemática em partes específicas.

▶ Dados não estruturados:

- ▶ Análises qualitativas e julgamento.

▶ Implantar solução.

PROCESSO DE SOLUÇÃO

- ▶ Definir a situação-problema:
 - ▶ Reconhecer a existência de um problema.
 - ▶ Transformação em um problema estruturado.
- ▶ Formular um modelo quantitativo:
 - ▶ Representar as variáveis do problema por símbolos e relações matemáticas.

PROCESSO DE SOLUÇÃO

- ▶ Resolver e encontrar a melhor solução:
 - ▶ Solucionar um modelo de equações/inequações.
- ▶ Considerar os fatores imponderáveis:
 - ▶ Estimar o impacto desses fatores.
- ▶ Implementar a solução.

CAMPOS DE APLICAÇÃO E MODELOS UTILIZADOS

- ▶ Campos de aplicação: análise de investimentos; programação da produção; planejamento estratégico; controle de projetos; alocação de recursos; manutenção de equipamentos; seleção de equipamentos etc.
- ▶ Modelos mais utilizados: programação matemática; teoria das filas; simulação; teoria dos grafos; teoria dos jogos; teoria da decisão; amostragem; séries temporais etc.

MODELO

- ▶ Representação simplificada de um sistema real, que pode ser um projeto já existente ou um projeto futuro.
- ▶ No primeiro caso, pretende-se reproduzir o funcionamento do sistema real existente, de forma a aumentar a produtividade.
- ▶ No segundo caso, o objetivo é definir a estrutura ideal do futuro sistema.

MODELOS

- ▶ **Modelos Icônicos:**
 - ▶ Fórmula 1 num túnel de vento
- ▶ **Modelos Analógicos:**
 - ▶ Diagrama Unifilar no Metrô.
- ▶ **Modelos Simbólicos:**
 - ▶ Simulador utilizado na UNIP

EXEMPLO 1

- Sueli faz bonecas artesanais de pano. Cada uma das bonecas custa para ser feita, considerando materiais e mão de obra, R\$ 18,00 e ela as vende por R\$ 30,00. Além disso, ela tem um custo fixo de R\$ 96,00 por mês. Qual o modelo matemático que representa o lucro dessa operação?

EXEMPLO 1

- ▶ Considerando x o número de bonecas vendidas ao longo de um mês o modelo matemático seria o seguinte:

$$L = (30 - 18) \cdot x - 96$$

- ▶ Perceba que poderíamos responder a questões a partir deste modelo, por exemplo:
 - ▶ Caso Sueli venda 15 bonecas qual será o lucro mensal dela?

EXEMPLO 1

$$L = (30 - 18) \cdot 15 - 96 = R\$ 84,00$$

► Quantas bonecas, no mínimo, Sueli deverá vender por mês para não ter prejuízo?

► Não ter prejuízo significa um lucro maior ou igual a zero, portanto:

$$0 \leq (30 - 18) \cdot x - 96 \therefore -12x \leq -96 \therefore 12x \geq 96$$

$$\therefore x \geq \frac{96}{12} \therefore x \geq 8 \text{ bonecas}$$

EXEMPLO 2

- ▶ Os problemas de Pesquisa Operacional não são tão elementares assim, são dotadas de uma maior complexidade, em especial pela introdução de restrições.
- ▶ Etapas básicas para um projeto de Pesquisa Operacional:
 - ▶ Formulação do problema,
 - ▶ Construção do modelo e,
 - ▶ Obtenção da solução.

EXEMPLO 2

- Considere que você tenha duas filhas em famílias diferentes: Débora Helena e Denise Maria. Se você pudesse planejaria sair com as duas ao mesmo tempo, e a todo tempo. Mas, sair com as duas ao mesmo tempo não dá. Elas não aceitariam sair com você juntas. E, sair todo dia também não dá. Você não tem dinheiro (entre outras coisas) para sair todo dia. Para garantir a sua felicidade, considerando estes problemas desagradáveis, você precisa decidir quantas vezes por semana vai sair com cada uma!

EXEMPLO 2

- Vamos chamar de x_1 a quantidade de vezes que você vai sair com a Débora por semana e x_2 a quantidade de vezes que você vai sair com a Denise, também por semana. Essas variáveis são chamadas (x_1 e x_2) são chamadas Variáveis de Decisão e são valores que representam o cerne do problema, e que podemos escolher (decidir) livremente.

EXEMPLO 2

- ▶ Veja que você pode sair quantas vezes quiser com cada uma das suas filhas. Entretanto existem alguns problemas: Débora é “metida” e gosta de lugares caros. Um passeio com ela custa R\$180,00. Já Denise é mais simples, gosta de passeios mais baratos. Sair com ela custa só R\$100,00. Por último, você tem um limite de gastos: no máximo R\$ 800,00 por semana. Como fazer para garantir que você não se endivide?

EXEMPLO 2

- ▶ Perceba que se você sai com Débora x_1 vezes por semana você gastará $180x_1$ reais por semana. Com Denise gastará $100x_2$ reais por semana. Portanto, os seus gastos semanais limitados a R\$ 800,00 seguem o seguinte modelo matemático:

$$180x_1 + 100x_2 \leq 800$$

- ▶ Essa é a expressão matemática de uma restrição, aquilo que você atender uma vez que está restrito ao valor de 800 reais. Perceba que existem inúmeras soluções possíveis para essa inequação, e qualquer uma seria válida se não tivéssemos restrições impostas.

EXEMPLO 2

- ▶ Outra restrição seria nos tempos gastos nos passeios. Débora é mais sossegada, um passeio com ela dura apenas 2 horas, já Denise, mais agitada usa 4 horas do seu precioso tempo e você só tem 20 horas semanais disponíveis para esses passeios. Essa restrição matematicamente seria expressa da seguinte forma:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 20$$

- ▶ Claro está que o número de passeios é um valor maior ou igual a zero, não existe um número de passeios negativo. Portanto temos mais duas restrições:

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

EXEMPLO

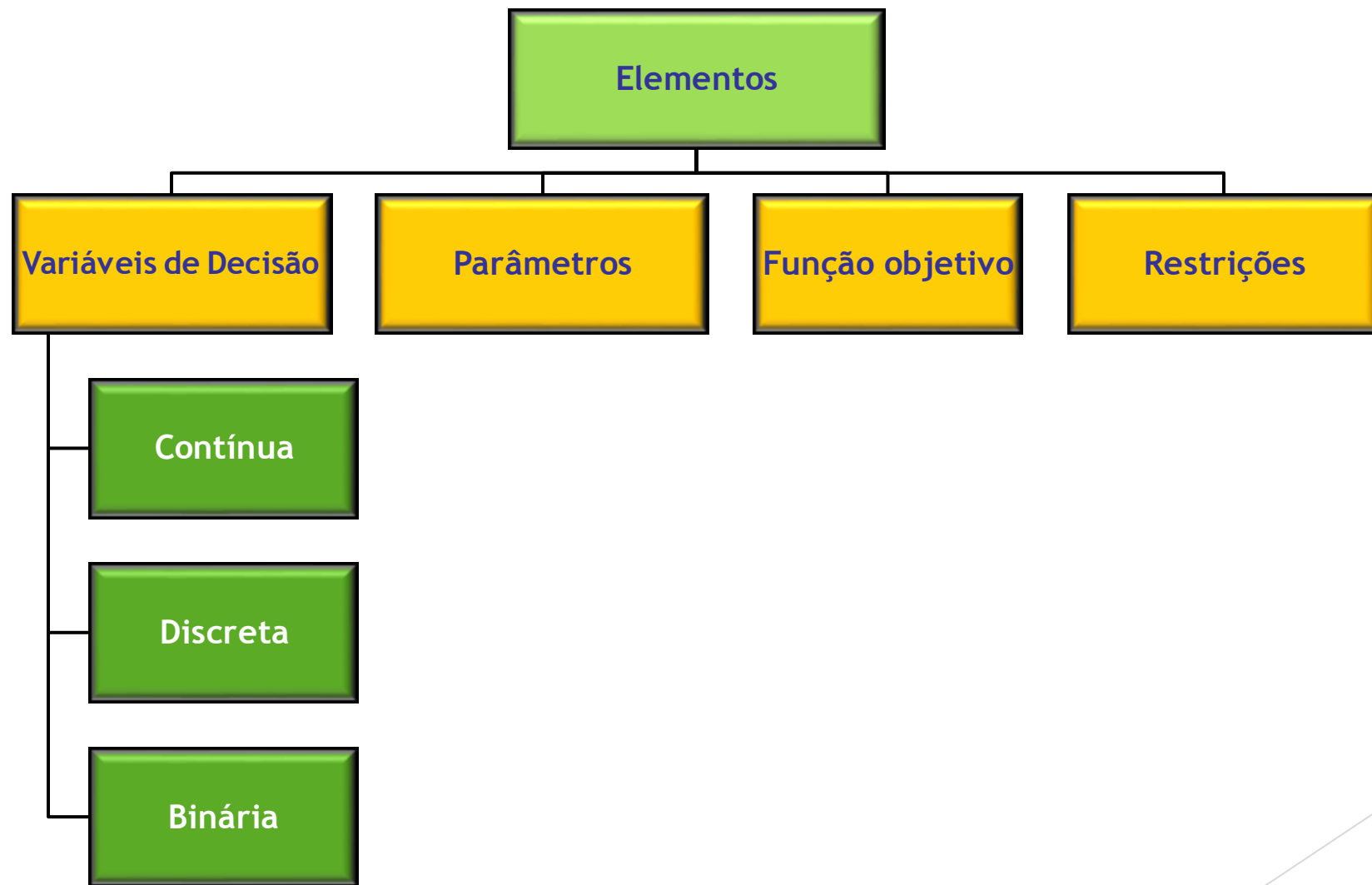
- Sua decisão será a obtenção do valor máximo do número de saídas com ambas as filhas e matematicamente corresponde à resolução do sistema de inequações:

$$\begin{cases} 180x_1 + 100x_2 \leq 800 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolvendo por tentativa e erro

x1	x2	dinheiro	tempo
0	5	500	20
1	4	580	18
2	4	760	20
3	2	740	14
4	0	720	8

MODELO QUANTITATIVO



VARIÁVEIS DE DECISÃO

- ▶ São as incógnitas ou valores desconhecidos que serão determinados pela solução do modelo.
(No exemplo das filhas é o número de passeios com cada uma)
- ▶ As variáveis de decisão devem assumir valores não negativos.
- ▶ Podem ser classificadas de acordo com as seguintes escalas de mensuração:
 - ▶ Contínuas.
 - ▶ Discretas.
 - ▶ Binárias.

VARIÁVEIS DE DECISÃO - CONTÍNUAS

- ▶ Podem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais, conjunto infinito ou não enumerável de valores.
- ▶ Exemplos:
 - ▶ Quantidade ótima a ser produzida (em litros) de cada tipo de refrigerante em uma empresa de bebidas.
 - ▶ Quantidade ótima a fabricar (em kg) de cada tipo de cereal em uma empresa alimentícia.
 - ▶ Porcentagens ótimas de cada ativo a ser alocado na carteira de investimento.

VARIÁVEIS DE DECISÃO - DISCRETAS

- ▶ Podem assumir valores dentro de um conjunto finito ou de uma quantidade enumerável de valores, sendo aquelas provenientes de determinada contagem.

(É o caso do número de passeios)

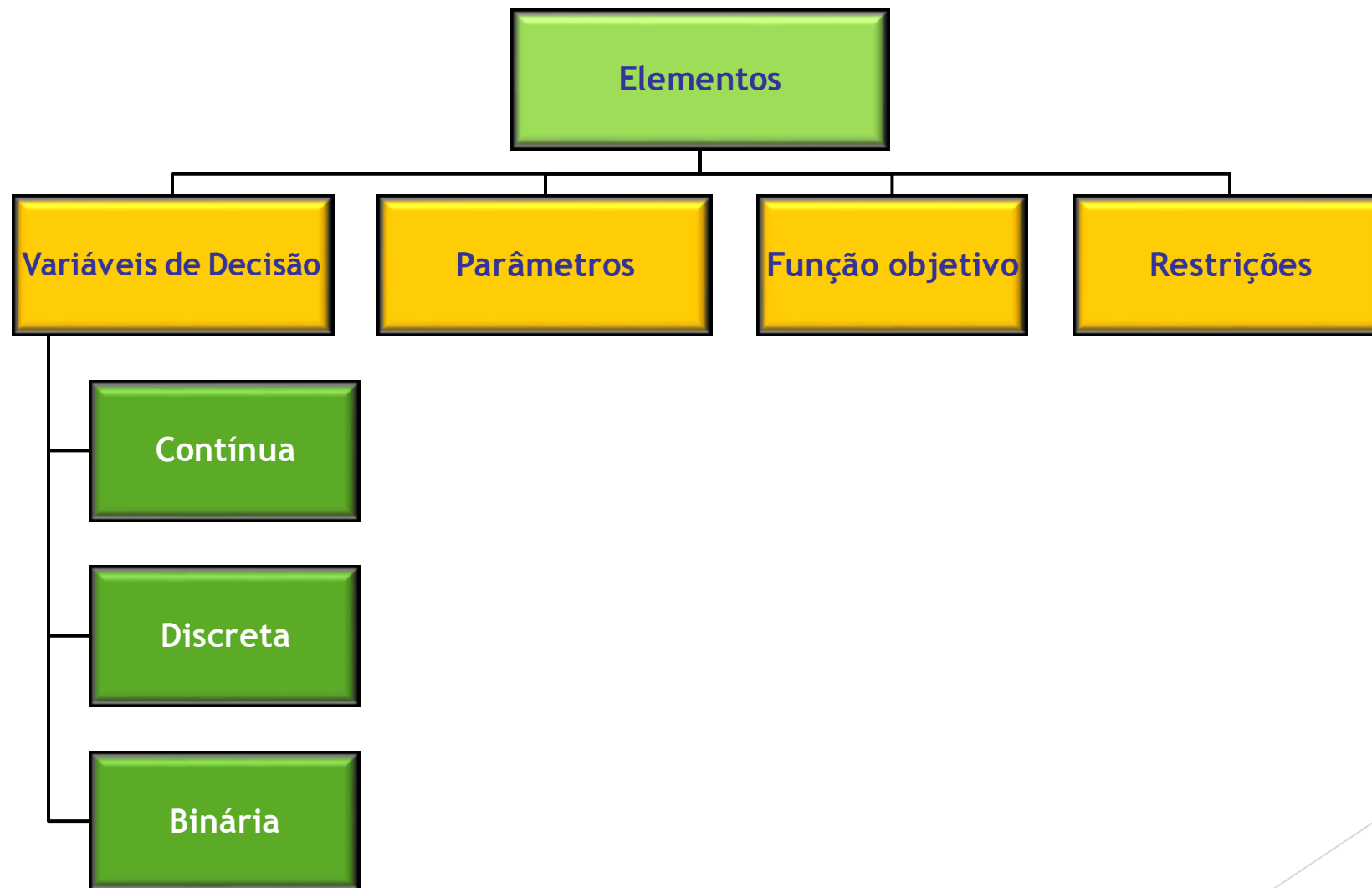
▶ Exemplos

- ▶ Número ideal de funcionários por turno de trabalho.
- ▶ Unidades a fabricar, de cada tipo de caminhão, em uma indústria automobilística.

VARIÁVEIS DE DECISÃO - BINÁRIAS

- ▶ Também conhecidas por variáveis *dummy*, podem assumir dois possíveis valores: 1 (quando a característica de interesse está presente na variável) ou 0 (caso contrário).
- ▶ Exemplos:
 - ▶ Fabricar ou não determinado produto.
 - ▶ Abrir ou não uma nova localidade.
 - ▶ Percorrer ou não determinado roteiro.

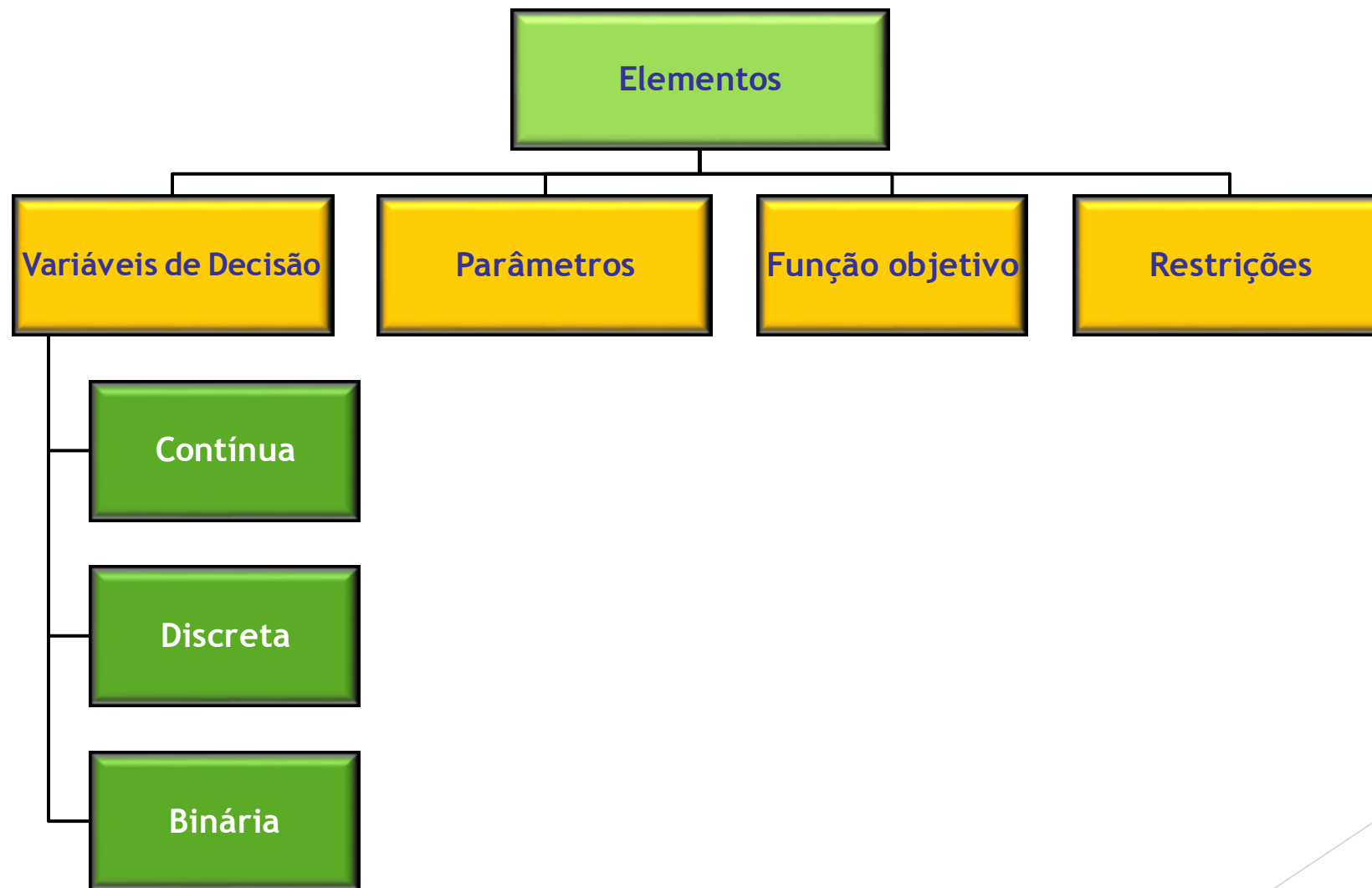
MODELO QUANTITATIVO



PARÂMETROS

- ▶ São os valores fixos previamente conhecidos do problema.
- ▶ Exemplos:
 - ▶ Demanda de cada produto para um problema de *mix* de produção.
 - ▶ Custo variável para produzir determinado tipo de móvel.
 - ▶ Lucro ou custo por unidade de produto fabricado.
 - ▶ Custo por funcionário contratado.
 - ▶ Margem de contribuição unitária quando da fabricação e venda de determinado produto.

MODELO QUANTITATIVO



FUNÇÃO OBJETIVO

- ▶ Função matemática que determina o valor alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução em função das variáveis de decisão e dos parâmetros.
- ▶ Pode ser uma função de:
 - ▶ Maximização (lucro, receita, utilidade, nível de serviço, riqueza, expectativa de vida, entre outros atributos).
 - ▶ Minimização (custo, risco, erro, entre outros).

No caso das filhas: O valor máximo a se gastar com os passeios

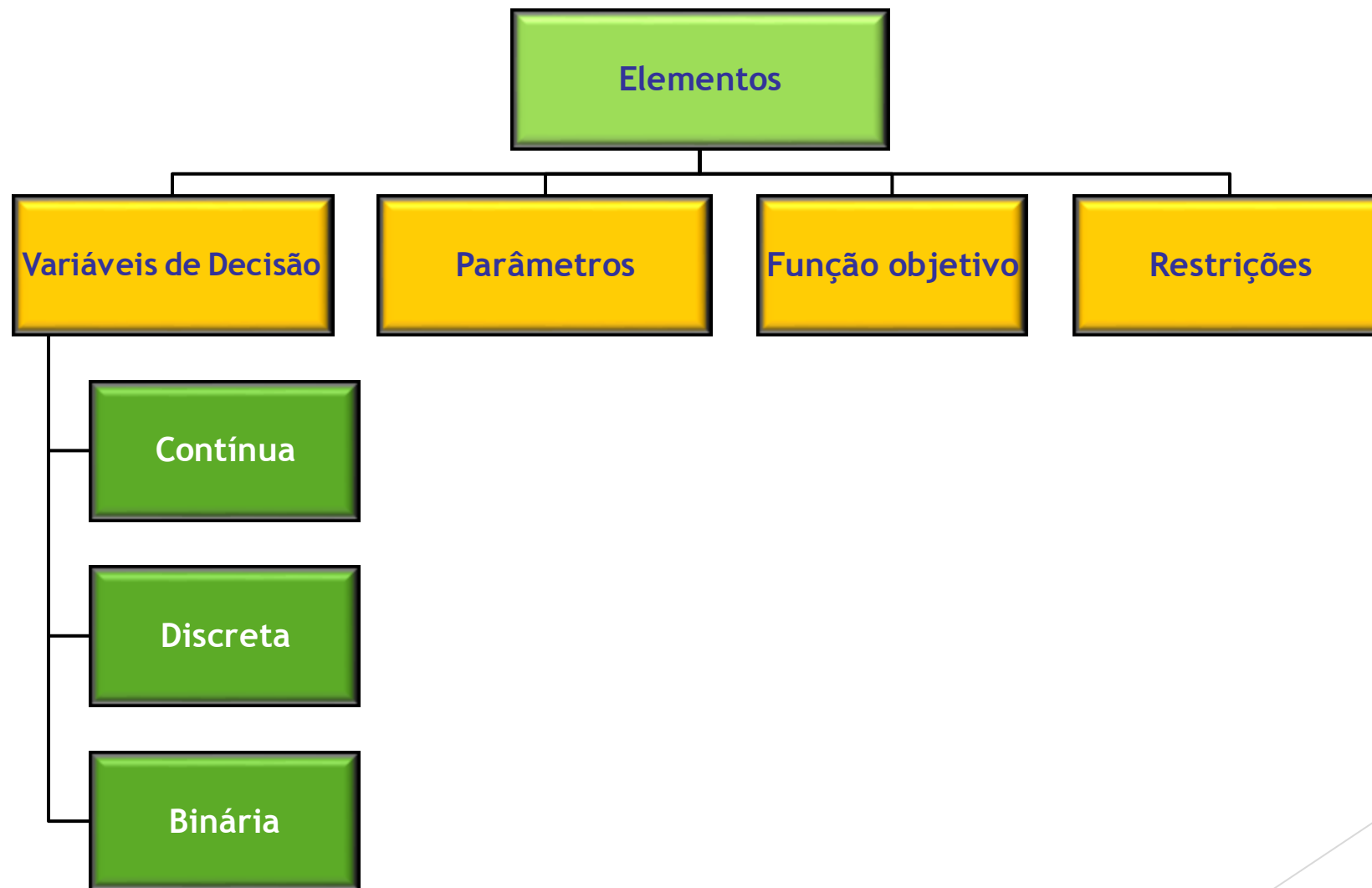
$$180x_1 + 100x_2 \leq 800$$

FUNÇÃO OBJETIVO

► Exemplos:

- Minimização do custo total de produção de diversos tipos de chocolates.
- Minimização do risco de crédito de uma carteira de clientes.
- Minimização do número de funcionários envolvidos em determinado serviço.
- Maximização do retorno sobre o investimento em fundos de ações de renda fixa.
- Maximização do lucro líquido na fabricação de diversos tipos de refrigerantes.

MODELO QUANTITATIVO



RESTRIÇÕES

- ▶ Conjunto de equações (expressões matemáticas de igualdade) e inequações (expressões matemáticas de desigualdade) que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer.
- ▶ São adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.

RESTRIÇÕES

- ▶ Exemplos:
 - ▶ Capacidade máxima de produção.
 - ▶ Risco máximo a que determinado investidor está disposto a se submeter.
 - ▶ Número máximo de veículos disponíveis.
 - ▶ Demanda mínima aceitável de um produto.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

- Uma empresa produz dois tipos de bolsas para senhoras.

A bolsa tipo A utiliza, para ser feita, 8 m² de couro; 12 m² de cetim e 3 metros de cordão de seda. A bolsa tipo B utiliza 6 m² de couro; 9 de cetim e 5 de cordão. A empresa tem disponível o seguinte estoque de matéria prima: 95 m² de couro; 150 m² de cetim e 86 metros lineares de cordão. Sabendo que o lucro, por unidade, da bolsa A vendida é de R\$ 150,00 e da bolsa B é de R\$260,00, modelar o problema para o cálculo do **lucro máximo**.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

Variáveis de decisão

- O que se deseja saber é a quantidade de bolsas Tipo A e de bolsas Tipo B que se deve produzir visando auferir lucro máximo. Portanto, as variáveis de decisão são:

$x_1 = \text{número de bolsas Tipo A}$

$x_2 = \text{número de bolsas Tipo B}$

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

Parâmetros

DESCRIÇÃO	COURO	CETIM	CORDÃO	LUCRO
BOLSA TIPO A	8	12	3	R\$ 150,00
BOLSA TIPO B	6	9	5	R\$ 260,00
ESTOQUE DISPONÍVEL	95	150	86	

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

Função objetivo

- ▶ O objetivo deste cálculo é determinar a quantidade de bolsas de cada tipo a ser produzida, de modo que o lucro seja máximo.
- ▶ A função para o cálculo do lucro é, portanto:

$$MaxL = 150x_1 + 260x_2$$

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

Restrições

- ▶ As restrições são relativas à limitações dos estoque de materiais:
- ▶ Couro: $8x_1 + 6x_2 \leq 95$
- ▶ Cetim: $12x_1 + 9x_2 \leq 150$
- ▶ Cordão: $3x_1 + 5x_2 \leq 86$
- ▶ Lógica $x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$

EXEMPLO DE MODELAGEM: MAXIMIZAÇÃO

- ▶ A modelagem do exemplo ficou assim, portanto:

$$\text{Max } L = 150x_1 + 260x_2$$

- ▶ Sujeita às restrições:

$$8x_1 + 6x_2 \leq 95$$

$$12x_1 + 9x_2 \leq 150$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 86$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

- ▶ A resolução matemática desse sistema de funções e inequações nos revelará os valores das variáveis de decisão.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MINIMIZAÇÃO

Um fabricante de ração deseja produzir, pelo mínimo custo, um determinado tipo de ração, conforme especificação do Ministério da Agricultura.

O Ministério especifica apenas 4 nutrientes, A, B, C e D, exigindo que um quilo de ração contenha:

- No mínimo 120 g de nutriente A;

- No mínimo 360g do nutriente B;

- No máximo 360 g do nutriente C;

- Exatamente 180 g do nutriente D.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MINIMIZAÇÃO

- O fabricante dispõe de três alimentos: milho, alfafa e silagem. Cada quilo destes alimentos contém os seguintes pesos dos nutrientes:

Alimento	Milho	Alfafa	Silagem
A	0,1	0,2	0,1
B	0,4	0,4	0,3
C	0,2	0,2	0,1
D	0,1	0,2	0,1

- Sabendo-se que o quilo de milho custa \$ 0,50, o de alfafa \$ 0,20 e o de silagem \$ 0,10, determinar a mistura que proporciona mínimo custo para fabricação da ração especificada.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MINIMIZAÇÃO

Variáveis de decisão

x = quantidade de milho por quilo de ração;

y = quantidade de alfafa por quilo de ração;

z = quantidade de silagem por quilo de ração.

Parâmetros

- ▶ Os parâmetros na tabela e mais:
- ▶ Quilo de milho custa \$ 0,50, o de alfafa \$ 0,20 e o de silagem \$ 0,10.

EXEMPLO DE MODELAGEM: MINIMIZAÇÃO

Função objetivo

$$\textit{Min } C = (0, 50x + 0, 20y + 0, 10z)$$

Restrições

Nutriente A: $0,1x + 0,2y + 0,1z \geq 0,12$

Nutriente B: $0,4x + 0,4y + 0,3z \geq 0,36$

Nutriente C: $0,2x + 0,2y + 0,1z \leq 0,36$

Nutriente D: $0,1x + 0,2y + 0,1z = 0,18$

Produção Total: $x+y+z \geq 1$

Lógicas: $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;$

EXEMPLO DE MODELAGEM: MINIMIZAÇÃO

Modelo Matemático

$$\text{Min } C = (0, 50x + 0, 20y + 0, 10z)$$

Sujeito à

$$0,1x + 0,2y + 0,1z \geq 0,12$$

$$0,4x + 0,4y + 0,3z \geq 0,36$$

$$0,2x + 0,2y + 0,1z \leq 0,36$$

$$0,1x + 0,2y + 0,1z = 0,18$$

$$x+y+z \geq 1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$